

# Método de Hardy Cross de resolución para sistemas de tuberías complejos

MC2314. Mecánica de Fluidos III

Prof. Geanette Polanco

Ene-Mar 2011

# Sistemas de tuberías

## Caso tipo:

Se requiere resolver la distribución de caudales del sistema de tuberías.



Se identifica el número de incógnitas a resolver



Se identifican las ecuaciones que comprenden el sistema de ecuaciones a resolver



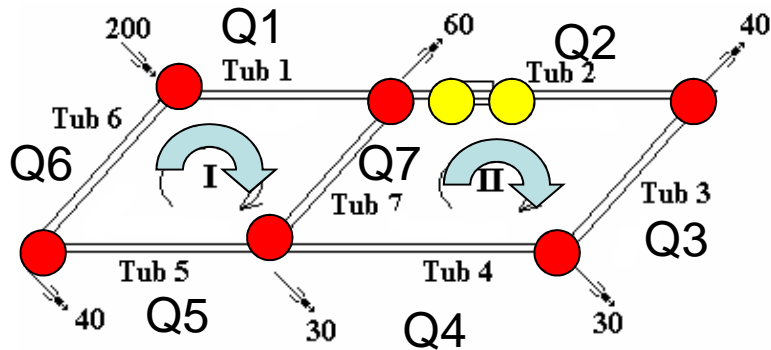
Primero se identifican los nodos que indican el número de ec. de continuidad (Sistema abierto,  $N$  ó cerrado,  $N-1$ )

Se identifican las mallas o pseudomallas que indican el número de ec. de energía, cuidando de no generar ecuaciones redundantes

Se construye el sistema de ecuaciones representativo del sistema físico



# Método de Hardy Cross: Caso tipo (Análisis)



¿Cuántos nodos hay en el sistema? ●

6 Nodos

¿Cuántas mallas hay en el sistema? ↻

2 mallas

¿Cuántas pseudo-mallas hay en el sistema? ↻

0 pseudo-mallas

¿Cuántos caudales desconocidos hay en el sistema?

7 Caudales, Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6 y Q7

➡ Sistema de ecuaciones de

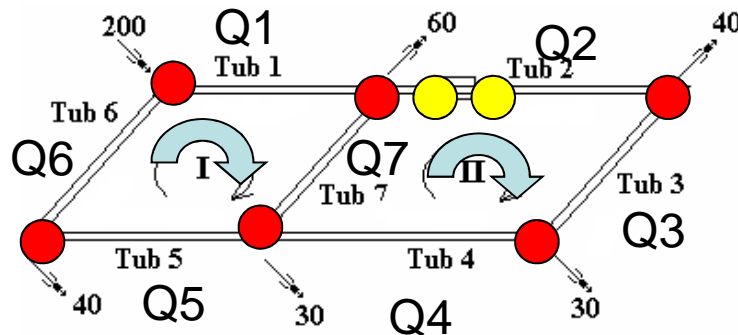
**7 x 7**

¿Cómo queda el sistema de ecuaciones del sistema?

5 Continuidad ( 6 nodos – 1 nodo) ➡ red cerrada

2 Balance de energía (2 mallas + 0 pseudo-mallas)

# Método de Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)



Sistema de ecuaciones de

**7 x 7**

( 5 Continuidad +  
2 Balance de energía)

¿Cómo queda el sistema de ecuaciones del sistema?

$$\begin{aligned} 0,2 - Q1 - Q6 &= 0 \\ Q1 - Q2 - Q7 - 0,06 &= 0 \\ Q2 - Q3 - 0,04 &= 0 \\ Q3 + Q4 - 0,03 &= 0 \\ Q7 + Q5 - Q4 - 0,03 &= 0 \end{aligned}$$

Hasta este punto solo se han supuesto sentidos más no magnitudes de flujo

$$\begin{aligned} R1 * Q1^2 + R7 * Q7^2 - R5 * Q5^2 - R6 * Q6^2 &= 0 \\ R2 * Q2^2 + R3 * Q3^2 - R4 * Q4^2 - R7 * Q7^2 &= 0 \end{aligned}$$

# Método Hardy Cross: Caso tipo

## (Definición)

- Se basa en el desarrollo en serie de Taylor de las ecuaciones de energía para cada malla o pseudomalla de forma individual

$$\text{Balance de energía} = BdE$$

$$BdE(Q) = BdE(Q_0) + \left. \frac{\partial BdE}{\partial Q} \right|_{Q_0} * \Delta Q + \left. \frac{\partial^2 BdE}{\partial Q^2} \right|_{Q_0} * \Delta Q^2 + \left. \frac{\partial^3 BdE}{\partial Q^3} \right|_{Q_0} * \Delta Q^3 + \dots$$

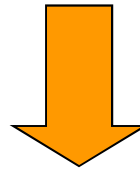
- Despreciando los términos de delta Q elevados a partir de la potencia 2 para cada malla o pseudomalla

$$\Delta Q_i = - \frac{BdE}{\left. \frac{\partial BdE}{\partial Q} \right|_{Q_0}}$$

$$\Delta Q_i = - \frac{\text{Balancede energía}}{\partial \text{Balancede energía} / \partial Q}$$

# Método de Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

$$R_1 * Q_1^2 + R_7 * Q_7^2 - R_5 * Q_5^2 - R_6 * Q_6^2 = BdE$$



Reescribiendo la ecuación de manera de mantener el signo de cada término individual

$$R_1 * \text{abs}(Q_1) * Q_1 + R_7 * \text{abs}(Q_7) * Q_7 - R_5 * \text{abs}(Q_5) * Q_5 - R_6 * \text{abs}(Q_6) * Q_6 = BdE$$

$$BdE(Q) = BdE(Q_0) + \left. \frac{\partial BdE}{\partial Q} \right|_{Q_0} * \Delta Q_I$$

Entonces la derivada respecto al caudal será:

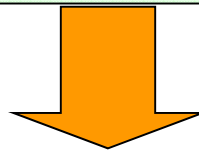
$$R_1 * \text{abs}(Q_1) + R_7 * \text{abs}(Q_7) - R_5 * \text{abs}(Q_5) - R_6 * \text{abs}(Q_6) = d(BdE)/dQ$$

$$\Delta Q_{\text{malla } I} = - \frac{R_1 |Q_1| Q_1 + R_7 |Q_7| Q_7 + R_5 |Q_5| Q_5 + R_6 |Q_6| Q_6}{2(R_1 |Q_1| + R_7 |Q_7| + R_5 |Q_5| + R_6 |Q_6|)}$$

Todo la expresión evaluada en una configuración de caudales iniciales

# Método de Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

$$\begin{aligned} R_1 * Q_1^2 + R_7 * Q_7^2 - R_5 * Q_5^2 - R_6 * Q_6^2 &= 0 \\ R_2 * Q_2^2 + R_3 * Q_3^2 - R_4 * Q_4^2 - R_7 * Q_7^2 &= 0 \end{aligned}$$



$$0 = BdE(Q_0) + \left. \frac{\partial BdE}{\partial Q} \right|_{Q_0} * \Delta Q$$

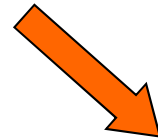
$$\Delta Q_{\text{malla I}} = - \frac{R_1 |Q_1| Q_1 + R_7 |Q_7| Q_7 + R_5 |Q_5| Q_5 + R_6 |Q_6| Q_6}{2(R_1 |Q_1| + R_7 |Q_7| + R_5 |Q_5| + R_6 |Q_6|)}$$

$$\Delta Q_{\text{malla II}} = - \frac{R_2 |Q_2| Q_2 + R_3 |Q_3| Q_3 + R_4 |Q_4| Q_4 + R_7 |Q_7| Q_7}{2(R_2 |Q_2| + R_3 |Q_3| + R_4 |Q_4| + R_7 |Q_7|)}$$

# Método de Hardy Cross : Caso tipo (Definición con bombas)

- En caso de existir una bomba en el sistema:

$$H_{bomba} = A_{bomba} * Q^2 + C_{bomba}$$



$$\frac{\partial H_{bomba}}{\partial Q} = 2A_{bomba}|Q|$$

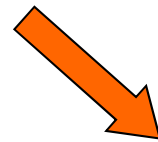
$$\Delta Q_{malla I} = - \frac{\left( \sum R_i |Q_i| Q_i - Q_i / |Q_i| H_{bomba} \right)}{2 \sum R_i |Q_i| + \left| \frac{\partial H_{bomba}}{\partial Q} \right|}$$



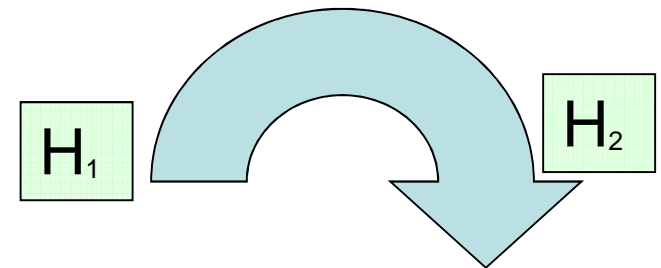
# Método de Hardy Cross : Caso tipo (Definición con tanques)

- En caso de existir dos o más tanques en el sistema:

$$H_1 - H_2 = \text{Valor}$$



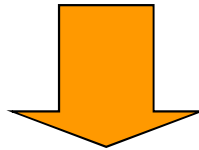
$$\frac{\partial \text{Valor}}{\partial Q} = 0$$



$$\Delta Q_{\text{malla I}} = - \frac{((H_1 - H_2) + \sum R_i |Q_i| Q_i)}{2 \sum R_i |Q_i|}$$

# Método de Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

$$\begin{aligned} R_1 * Q_1^2 + R_7 * Q_7^2 - R_5 * Q_5^2 - R_6 * Q_6^2 &= 0 \\ R_2 * Q_2^2 + R_3 * Q_3^2 - R_4 * Q_4^2 - R_7 * Q_7^2 &= 0 \end{aligned}$$



$$\Delta Q_{malla I} = - \frac{R_1 |Q_1| Q_1 + R_7 |Q_7| Q_7 + R_5 |Q_5| Q_5 + R_6 |Q_6| Q_6}{2(R_1 |Q_1| + R_7 |Q_7| + R_5 |Q_5| + R_6 |Q_6|)}$$

$$\Delta Q_{malla II} = - \frac{R_2 |Q_2| Q_2 + R_3 |Q_3| Q_3 + R_4 |Q_4| Q_4 + R_7 |Q_7| Q_7}{2(R_2 |Q_2| + R_3 |Q_3| + R_4 |Q_4| + R_7 |Q_7|)}$$

# Método de Hardy Cross : Caso tipo (Definición genérica)

- Para cualquier modelo de pérdidas:

$$\Delta Q_{malla I} = - \frac{((H_1 - H_2) + \sum p\u00e9rdidas - Q_i / |Q_i| H_{bomba})}{\sum \frac{\partial p\u00e9rdidas}{\partial Q} + \left| \frac{\partial H_{bomba}}{\partial Q} \right|}$$

# Método Hardy Cross: Caso tipo (Definición)

Las ecuaciones de continuidad solo se usan para proponer los valores iniciales de los diferentes caudales.

$$\sum Q_{entrada} = \sum Q_{salida}$$

# Método Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

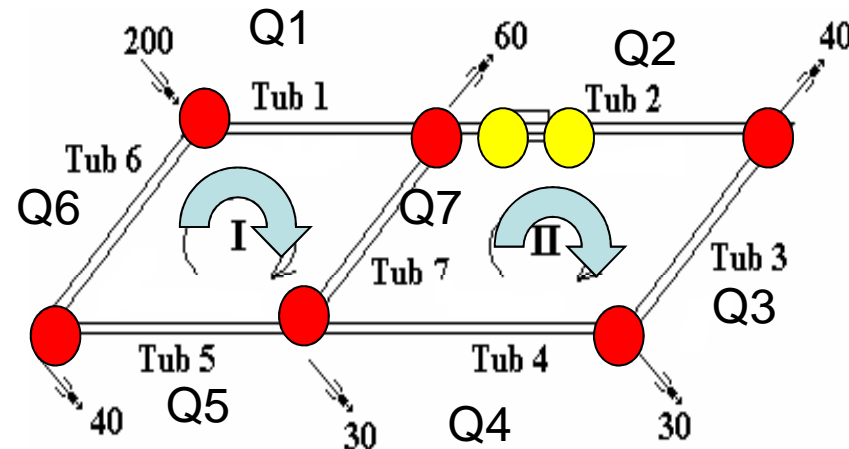
## Chequeo del sistema:

1. Todos los caudales incógnitas deben aparecer en al menos una ecuación de delta de caudal
2. Los valores a proponer **DEBEN** cumplir continuidad en todos los nodos del sistema

# Método Hardy Cross: Caso tipo (Definición)

¿Cómo se reescribe el sistema de ecuaciones del sistema según el método de Hardy Cross?

$$\Delta Q_{\text{malla I}}$$
$$\Delta Q_{\text{malla II}}$$



$$0,2 - Q_1 - Q_6 = 0$$
$$Q_1 - Q_2 - Q_7 - 0,06 = 0$$
$$Q_2 - Q_3 - 0,04 = 0$$
$$Q_3 + Q_4 - 0,03 = 0$$
$$Q_7 + Q_5 - Q_4 - 0,03 = 0$$

Solo para proponer los valores iniciales

# Método Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

$$\Delta Q_{malla I} = - \frac{R_1 |Q_1| Q_1 + R_7 |Q_7| Q_7 + R_5 |Q_5| Q_5 + R_6 |Q_6| Q_6}{2(R_1 |Q_1| + R_7 |Q_7| + R_5 |Q_5| + R_6 |Q_6|)}$$

$$R = (fL/D + K) / 2gA^2$$

f

Re

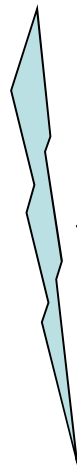
Re

Actualizar (**OPCIONAL**)

$$\Delta Q_{malla II} = - \frac{R_2 |Q_2| Q_2 + R_3 |Q_3| Q_3 + R_4 |Q_4| Q_4 + R_7 |Q_7| Q_7}{2(R_2 |Q_2| + R_3 |Q_3| + R_4 |Q_4| + R_7 |Q_7|)}$$

Q1 = 0.12
Q2 = 0.05
Q3 = 0.01
Q4 = 0.02
Q5 = 0.04
Q6 = 0.08
Q7 = 0.01

[m3/s]



Siguiente valor

Q1 = 0.115
Q2 = 0.042
Q3 = 0.002
Q4 = 0.028
Q5 = 0.045
Q6 = 0.085
Q7 = 0.012

[m3/s]

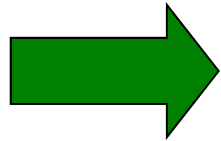
Verificar

Actualizar

**(OBLIGATORIO)**

# Método Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

Verificar



$$\Delta Q_{\text{malla I}} \text{ --- } > 0$$

$$\Delta Q_{\text{malla II}} \text{ --- } > 0$$

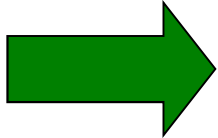
Los diferenciales deben tender a cero o al menos deben ser menores al valor de la tolerancia establecida



# Método Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

Actualizar

**(OBLIGATORIO)**



Para elementos que solo pertenecen a una malla

$$Q_1 = Q_{1- anterior} + \Delta Q_{malla I}$$

$$Q_2 = Q_{2- anterior} + \Delta Q_{malla II}$$

$$Q_3 = Q_{3- anterior} + \Delta Q_{malla II}$$

$$Q_4 = Q_{4- anterior} + \Delta Q_{malla II}$$

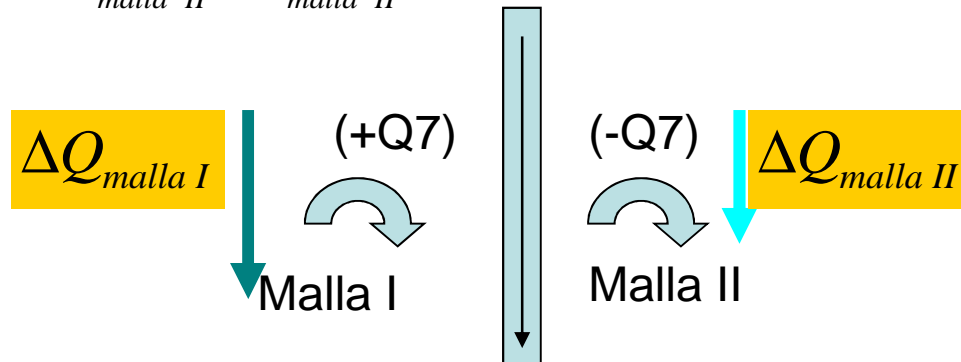
$$Q_5 = Q_{5- anterior} + \Delta Q_{malla I}$$

$$Q_6 = Q_{6- anterior} + \Delta Q_{malla I}$$

Para elementos que pertenecen a dos mallas

$$Q_{7 \text{ malla I}} = Q_{7- anterior \text{ malla I}} + \Delta Q_{malla I} - \Delta Q_{malla II}$$

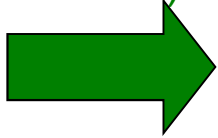
$$Q_{7 \text{ malla II}} = Q_{7- anterior \text{ malla II}} + \Delta Q_{malla II} - \Delta Q_{malla I}$$



# Método Hardy Cross: Caso tipo (Sistema de ecuaciones)

Actualizar

(OPCIONAL)



Una vez calculado Delta Q1 se actualizan los caudales del lazo en especial los elementos comunes con otras mallas

$$Q_1 = Q_{1- anterior} + \Delta Q_{malla I}$$

$$Q_5 = Q_{5- anterior} + \Delta Q_{malla I}$$

$$Q_6 = Q_{6- anterior} + \Delta Q_{malla I}$$

$$Q_{7- parcial} = Q_{7- anterior} + \Delta Q_{malla I}$$

Para el cálculo de delta Q2 se utilizan los valores parciales

$$Q_2 = Q_{2- anterior} + \Delta Q_{malla II}$$

$$Q_3 = Q_{3- anterior} + \Delta Q_{malla II}$$

$$Q_4 = Q_{4- anterior} + \Delta Q_{malla II}$$

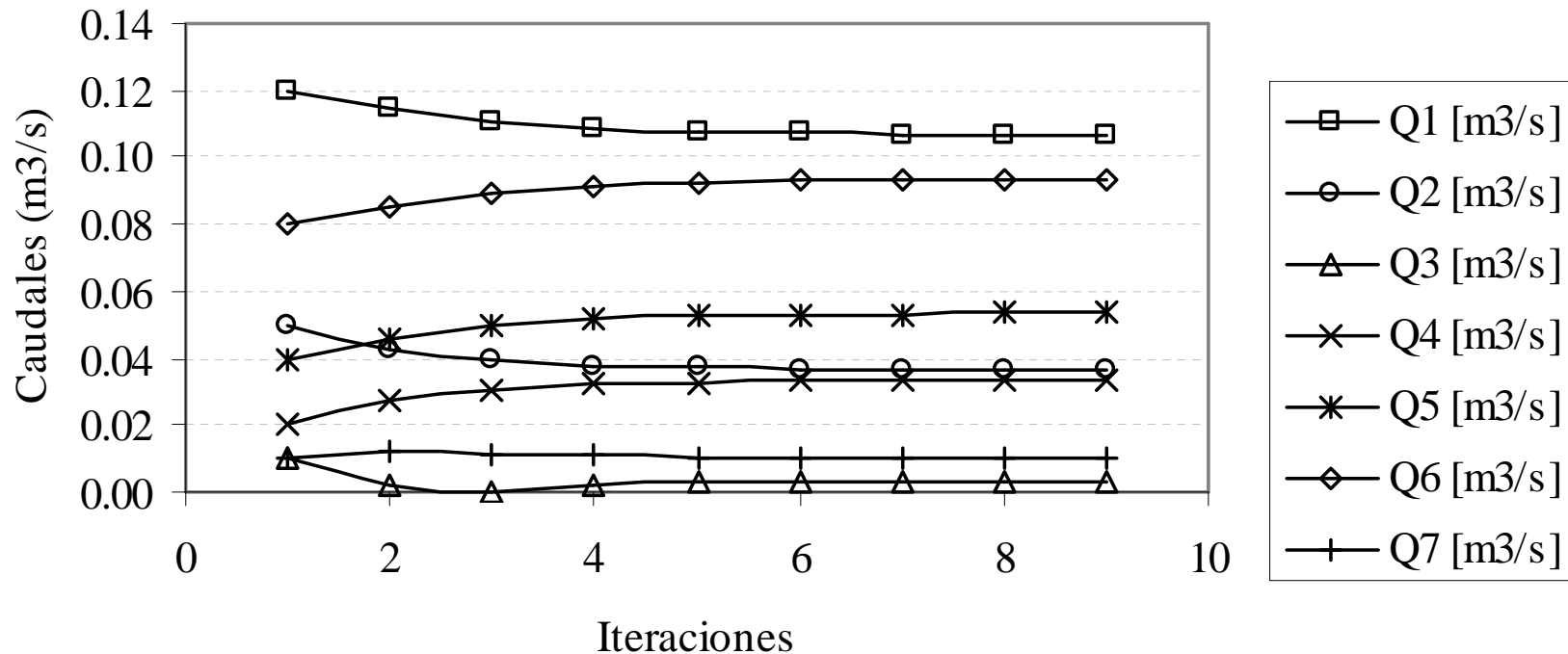
$$Q_{7- parcial} = Q_{7- parcial anterior} + \Delta Q_{malla II}$$

malla II                      malla II

Este procedimiento acelera la convergencia

# Método lineal: Caso tipo (Solución)

- Convergencia y número de iteraciones antes de converger:



Gráfica para valores iniciales propuestos en la presentación